

LIBRIS

We know
books

TITU ANDREESCU

DORIN ANDRICA

O INTRODUCERE ÎN STUDIUL

**ECUAȚIILOR
DIOFANTIENE**

Editura GIL

Cuprins

Prefață	3
Partea 1. Ecuatii diofantiene	7
Capitolul 1. Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantiene	9
1.1. Metoda descompunerii	9
1.2. Rezolvarea ecuațiilor diofantiene cu ajutorul inegalităților	15
1.3. Metoda parametrică	21
1.4. Metoda aritmeticii modulare	27
1.5. Metoda inducției matematice	33
1.6. Metoda descendenței infinite a lui Fermat (MDIF)	43
1.7. Ecuatii diofantiene diverse	54
Capitolul 2. Câteva ecuații diofantiene clasice	61
2.1. Ecuatii diofantiene liniare	61
2.2. Triplete pitagorice și probleme înrudite	69
2.3. Alte ecuații remarcabile	79
Capitolul 3. Ecuatii de tip Pell	99
3.1. Ecuația Pell: istoric și motivație	100
3.2. Rezolvarea ecuației lui Pell prin metode elementare	103
3.3. Ecuația $ax^2 - by^2 = 1$	110
3.4. Ecuația Pell negativă	113

Partea 2. Soluții ale exercițiilor și problemelor propuse 119

Capitolul 1. Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantiene	121
1.1. Metoda descompunerii	121
1.2. Rezolvarea ecuațiilor diofantiene cu ajutorul inegalităților	126
1.3. Metoda parametrică	131
1.4. Metoda aritmeticii modulare	135
1.5. Metoda inducției matematice	140
1.6. Metoda descendenței infinite a lui Fermat (MDIF)	148
1.7. Ecuații diofantiene diverse	160
Capitolul 2. Câteva ecuații diofantiene clasice	169
2.1. Ecuații diofantiene liniare	169
2.2. Triplete pitagorice și probleme înrudite	174
2.3. Alte ecuații remarcabile	176
Capitolul 3. Ecuații de tip Pell	183
3.2. Rezolvarea ecuației lui Pell prin metode elementare	183
3.3. Ecuația $ax^2 - by^2 = 1$	185
3.4. Ecuația Pell negativă	187
Bibliografie	191
Indice	195

CAPITOLUL 1

Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantiene

1.1. Metoda descompunerii

Această metodă constă în scrierea ecuației $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ sub forma

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$$

unde $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ și $a \in \mathbb{Z}$. Folosind descompunerea în factori primi a lui a , obținem un număr finit de descompuneri în k factori întregi $a_1, a_2, \dots, a_k$. Fiecare astfel de descompunere conduce la un sistem de ecuații de forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2 \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme de ecuații obținem mulțimea de soluții pentru ecuația considerată.

Vom ilustra această metodă prin câteva exemple.

Exemplul 1. *Determinați toate soluțiile întregi pentru ecuația*

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

(Titu Andreescu)

Soluție. Scriem ecuația sub forma

$$x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y)(1 - xy) = 4,$$

sau

$$(xy - 1)^2 + (x - y)^2 - 2(x - y)(xy - 1) = 4.$$

Aceasta este echivalentă cu

$$[xy - 1 - (x - y)]^2 = 4$$

de unde se obține

$$(x + 1)(y - 1) = \pm 2.$$

Dacă $(x + 1)(y - 1) = 2$, rezultă sistemele de ecuații

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases}$$

care conduc la soluțiile $(1, 2), (-3, 0), (0, 3), (-2, -1)$.

Dacă $(x + 1)(y - 1) = -2$, se obțin sistemele

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = 2 \end{cases}$$

ale căror soluții sunt $(1, 0), (-3, 2), (0, -1), (-2, 3)$.

Toate cele opt perechi determinate satisfac ecuația considerată.

Exemplul 2. Fie p și q două numere prime. Rezolvați în numere întregi pozitive ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}.$$

Soluție. Ecuația este echivalentă cu ecuația diofantiană algebrică

$$(x - pq)(y - pq) = p^2q^2.$$

Considerând toți divizorii pozitivi ai numărului p^2q^2 obținem următoarele sisteme de ecuații

$$\begin{cases} x - pq = 1 \\ y - pq = p^2q^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = p \\ y - pq = pq^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = q \\ y - pq = p^2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = p^2 \\ y - pq = q^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = pq \\ y - pq = pq \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = pq^2 \\ y - pq = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = p^2q \\ y - pq = q \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = q^2 \\ y - pq = p^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - pq = p^2q^2 \\ y - pq = 1 \end{cases}$$

care ne conduc la soluțiile

$$(1 + pq, pq(1 + pq)), \quad (p(1 + q), pq(1 + q)), \quad (q(1 + p), pq(1 + p)),$$

$$(p(p + q), q(p + q)), \quad (2pq, 2pq), \quad (pq(1 + q), p(1 + q)),$$

$$(pq(1 + p), q(1 + p)), \quad (q(p + q), p(p + q)), \quad (pq(1 + pq), 1 + pq).$$

Observație. Ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n},$$

unde $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, are $(1 + 2\alpha_1) \dots (1 + 2\alpha_k)$ soluții în numere întregi pozitive.

Într-adevăr, ecuația este echivalentă cu

$$(x - n)(y - n) = n^2$$

și $n^2 = p_1^{2\alpha_1} \dots p_k^{2\alpha_k}$ are $(1 + 2\alpha_1) \dots (1 + 2\alpha_k)$ divizori pozitivi.

Exemplul 3. Determinați toate perechile (x, y) de numere naturale pentru care

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

(Olimpiada de matematică din India)

Soluție. Ecuația este echivalentă cu

$$(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2$$

sau

$$(xy - 6)^2 - (x + y)^2 = -13.$$

Obținem astfel ecuația diofantiană

$$[xy - 6 - (x + y)][xy - 6 + (x + y)] = -13,$$

care conduce la sistemele

$$\begin{cases} xy - 6 - (x + y) = -1 \\ xy - 6 + (x + y) = 13 \end{cases} ; \quad \begin{cases} xy - 6 - (x + y) = -13 \\ xy - 6 + (x + y) = 1 \end{cases}$$

Cele două sisteme sunt echivalent cu

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Soluțiile ecuației din enunț sunt $(3, 4), (4, 3), (0, 7), (7, 0)$.

Exemplul 4. *Rezolvați în numere întregi următoarea ecuație*

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$$

(Olimpiada de matematică din Polonia)

Soluție. Cu substituțiile $x = u + 1, y = v + 1$, ecuația devine

$$(u + 1)^2v + (v + 1)^2u = 1,$$

care este echivalentă cu

$$uv(u + v) + 4uv + (u + v) = 1.$$

Scriem această ultimă ecuație sub forma

$$uv(u + v + 4) + (u + v + 4) = 5$$

$$(u + v + 4)(uv + 1) = 5.$$

Unul dintre factori trebuie să fie egal cu 5 sau -5, iar celălalt cu 1 sau -1. Rezultă astfel că suma $u + v$ și produsul uv satisfac unul dintre următoarele patru sisteme de ecuații

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -9 \\ uv = -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -3 \\ uv = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -5 \\ uv = -6 \end{cases}$$

Numai primul și ultimul dintre aceste sisteme au soluții întregi. Acestea sunt $(0, 1), (1, 0), (-6, 1), (1, -6)$. Prin urmare $(x, y) = (u + 1, v + 1)$ trebuie să fie $(1, 2), (-5, 2), (2, 1), (2, -5)$.

Exemplul 5. *Găsiți toate tripletele (x, y, z) de numere naturale astfel încât*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p,$$

unde p este un număr prim mai mare decât 3.

(Titu Andreescu, Dorin Andrica)

Soluție. Ecuația este echivalentă cu

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = p$$

Deoarece $x + y + z > 1$, rezultă că $x + y + z = p$ și $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1$. Ultima ecuație este echivalentă cu $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x \geq y \geq z$. Dacă $x > y > z$, avem $x - y \geq 1$, $y - z \geq 1$ și $x - z \geq 2$, ceea ce implică $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 6 > 2$.

Prin urmare $x = y = z + 1$ sau $x - 1 = y = z$. Numărul prim p este de forma $3k + 1$ sau $3k + 2$. În primul caz soluțiile sunt $\left(\frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p+2}{3}\right)$

și permutările corespunzătoare. În cel de-al doilea caz soluțiile sunt $\left(\frac{p-2}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}\right)$ și permutările corespunzătoare.

Exerciții și probleme

1. Rezolvați în numere întregi x, y următoarea ecuație

$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2.$$

2. Pentru orice număr natural nenul n , fie $s(n)$ numărul perechilor ordonate (x, y) de numere naturale nenule pentru care

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Determinați n pentru care $s(n) = 5$.

(Olimpiada de matematică din India)

3. Fie p și q două numere prime. Aflați numărul perechilor (x, y) de numere naturale nenule care satisfac ecuația

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 1$$

(KöMaL)

4. Determinați soluțiile întregi pozitive ale ecuației

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

(Olimpiada de matematică din Rusia)

5. Rezolvați ecuația diofantană $x - y^4 = 4$ unde x este un număr prim.

6. Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) pentru care

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

(Olimpiada de matematică din România)

7. Rezolvați următoarea ecuație în numere întregi nenule x, y

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

(A 16-a Olimpiadă de matematică din SUA)

8. Determinați toate numerele întregi a, b, c cu $1 < a < b < c$ astfel încât $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ este un divizor al lui $abc - 1$.

(A 33-a OIM)

9. Aflați toate triunghiurile dreptunghice având lungimile laturilor numere întregi și aria egală cu perimetrul.

10. Rezolvați în numere întregi x, y, z, u, v sistemul

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = xyuv + (x + y)(u + v) \\ xy + z + uv = xy(u + v) + uv(x + y) \end{cases}$$

(Titu Andreescu)

1.2. Rezolvarea ecuațiilor diofantiene cu ajutorul inegalităților

Această metodă constă în determinarea unor intervale în care se află necunoscutele, prin utilizarea unor inegalități adecvate. În general, acest proces conduce numai la un număr finit de posibilități pentru toate necunoscutele sau pentru o parte dintre acestea.

Exemplul 1. *Să se determine toate perechile (x, y) de numere întregi astfel încât*

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$